
LÖSUNGEN ZU
KONRAD KÖNIGSBERGER: ANALYSIS I

— KAPITEL 2 —

TIM KOPISCHKE
DEZEMBER 2020

Aufgabe 1 : ✓	Aufgabe 5 : ✓	Aufgabe 9 : ✓	Aufgabe 13 : ✓
Aufgabe 2 : ✓	Aufgabe 6 : ✓	Aufgabe 10 : ✓	Aufgabe 14 : ✓
Aufgabe 3 : ✓	Aufgabe 7 : ✓	Aufgabe 11 : ✓	Aufgabe 15 : ✓
Aufgabe 4 : ✓	Aufgabe 8 : ✓	Aufgabe 12 : ✓	

Aufgabe 1

Induktionsanfang. $n = 1$. Aus $(1 - x) < \frac{1}{1+x}$ folgt mittels beidseitiger Multiplikation mit $(1 + x)$, dass $x^2 > 0$.

Induktionsvoraussetzung. Die Behauptung gelte für n .

Induktionsschluss. $n \rightarrow n + 1$.

Gemäß Induktionsvoraussetzung gilt, dass

$$(1 - x)^{n+1} = (1 - x)^n(1 - x) < \frac{1}{1 + nx}(1 - x) \quad (1)$$

Es ist aber $\frac{1}{1+nx}(1 - x) < \frac{1}{1+(n+1)x}$, denn

$$1 - x < \frac{1 + nx}{1 + (n + 1)x} \implies 1 < 1 + \underbrace{\frac{(n + 1)x^2}{1 + (n + 1)x}}_{>0} \quad (2)$$

■

Aufgabe 2

Es gilt $0 < a < b$ und damit $(\sqrt[k]{a})^k < (\sqrt[k]{b})^k$, also $\sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}$ und $\sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} > 0$. Zum Widerspruch sei angenommen, dass $\sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} \geq \sqrt[k]{b - a}$. Dann würde gelten

$$b \geq (\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b - a})^k$$

und mit der Binomialentwicklung der rechten Seite

$$\begin{aligned} (\sqrt[k]{a} + \sqrt[k]{b - a})^k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (\sqrt[k]{a})^i (\sqrt[k]{b - a})^{k-i} \\ &= b - a + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} (\sqrt[k]{a})^i (\sqrt[k]{b - a})^{k-i} + a \\ &= b + \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} (\sqrt[k]{a})^i (\sqrt[k]{b - a})^{k-i}}_{>0} \end{aligned}$$

folgt dann der Widerspruch.

■

Aufgabe 3

Das folgt sofort aus der AM-GM-Ungleichung, denn $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$, also die Behauptung für $x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 1$. ■

Aufgabe 4

Es gilt $A(a, b) \geq G(a, b)$, denn andernfalls ist $a - 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0$. Auf ähnliche Weise folgt unter der Annahme $H(a, b) = \frac{2ab}{a+b} > \sqrt{ab} = G(a, b)$, dass

$$\frac{a+b}{2} \frac{1}{ab} < \frac{1}{\sqrt{ab}} \quad (3)$$

was wegen $(\sqrt{ab})^2 = ab$ im Fall $0 < a < b$ und $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$ zum Widerspruch führt.

Damit sind die Ungleichungen bewiesen. Es ist $A(a, b) = G(a, b)$ genau dann, wenn

$$a - 2\sqrt{ab} + b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0, \quad (4)$$

d.h. genau dann wenn $\sqrt{b} = \sqrt{a}$, also $a = b$. $G(a, b) = H(a, b)$ gilt genau dann, wenn $\frac{2ab}{a+b} = \sqrt{ab}$, also nach obiger Rechnung wieder genau dann wenn $a = b$. ■

Aufgabe 5

Es ist $a_{n+1} \geq a_n$, denn

$$H(a_n, b_n) \geq a_n \iff \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} \geq a_n \iff 2a_nb_n \geq a_n^2 + a_nb_n \iff a_nb_n \geq a_n^2 \quad (5)$$

Die letzte Ungleichung stimmt wegen $A(a, b) \geq H(a, b)$ und Aufgabe 4.

Genauso ist $b_{n+1} \leq b_n$ wegen

$$A(a_n, b_n) \leq b_n \iff \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n \iff a_n + b_n \leq 2b_n \iff a_n \leq b_n \quad (6)$$

und Aufgabe 4. Also haben wir $I_{n+1} \subset I_n$.

Weiterhin ist $\frac{b_n - a_n}{b_n + a_n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\begin{aligned} |I_n| &= b_n - a_n = A(a_{n-1}, b_{n-1}) - H(a_{n-1}, b_{n-1}) \\ &= \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(a_{n-1} - b_{n-1})(a_{n-1} + b_{n-1})}{a_{n-1} + b_{n-1}} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} (b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2} |I_{n-1}| \end{aligned}$$

Induktiv folgt also $|I_n| \leq \frac{1}{2^n} (b - a)$. Für beliebiges $\epsilon > 0$ wähle $n := \log_2 \left(\frac{b-a}{\epsilon} \right) + 1$. Dann ist

$$n > \log_2 \left(\frac{b-a}{\epsilon} \right) \implies 2^n > \frac{b-a}{\epsilon} \implies \frac{1}{2^n} (b-a) < \epsilon \quad (7)$$

und damit erst recht $|I_n| < \epsilon$. Insgesamt ist I_n also eine Intervallschachtelung.

Die geforderte Abschätzung ergibt sich aus der Berechnung von $|I_n|$ von oben und der Tatsache, dass

$$\frac{1}{2(a_{n-1} + b_{n-1})} < \frac{1}{4a} \iff \frac{1}{a_{n-1} + b_{n-1}} \leq \frac{1}{2a} \iff a_{n-1} + b_{n-1} \geq 2a \iff a_{n-1} + b_{n-1} \geq a_1 + a_1 \quad (8)$$

Die letzte Ungleichung ist klarerweise wahr, da $a_{n-1} \geq a_1$ wegen der Intervallschachtelungseigenschaft und $b_{n-1} \geq a_{n-1} \geq a_1$.

Der Punkt $\sqrt{ab}$ ist in allen Intervallen enthalten, da stets $a_{n+1} \leq \sqrt{a_nb_n} \leq b_{n+1}$ aufgrund der Abschätzung von Aufgabe 4 und $a_nb_n = ab$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt aufgrund des Einschlusslemmas, dass $\sqrt{ab} \in I_n \forall n \in \mathbb{N}$.

■

Aufgabe 6

Wegen $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gemäß Aufgabe 4 ist $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a^2} = |a| \geq a$. Dass $b_{n+1} \leq b_n$ wurde schon in Aufgabe 5 gezeigt. Also haben wir $I_{n+1} \subset I_n$.

Auf der anderen Seite ist

$$I_n = b_n - a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} = \frac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{2} \leq \frac{(\sqrt{b_{n-1}} - \sqrt{a_{n-1}})^2}{2} = \frac{1}{2} |I_{n-1}| \quad (9)$$

Also kann für beliebiges ϵ ein n wie in Aufgabe 5 genommen werden und man erhält $|I_n| < \epsilon$.

Insgesamt liegt somit eine Intervallschachtelung vor.

Die Abschätzung wird ähnlich bewiesen wie in Aufgabe 5.

■

Aufgabe 7

Wir leiten erst eine explizite Darstellung für f_n und F_n her. Wie Königsberger in seiner sehr kurzen Lösung andeutet (aber nicht durchführt), geschieht dies elementargeometrisch. Die Kernidee ist hierbei die Flächeninhalte der regelmäßigen n -Ecke durch Aufteilung jedes n -Ecks in kongruente Dreiecke zu bestimmen.

Es gilt klarerweise, dass $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ bzw. im allgemeinen Fall $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, da alle Dreiecke kongruent sind. Für einbeschriebene n -Ecke ist die Bestimmung des Flächeninhalts somit reduziert auf die Bestimmung von n kongruenten Dreiecken, die jeweils zwei Seiten der Länge 1 und einen Winkel α ausweisen. Um die noch fehlende Höhe des Dreiecks zu berechnen, benutzt man die Sinusfunktion und erhält für ein beliebiges Dreieck im n -Eck den Flächeninhalt $I(\triangle_{e,n}) = \frac{1}{2} 1 \cdot 1 \cdot \sin(\alpha)$. Das gesamte einbeschriebene n -Eck hat somit den Flächeninhalt $I(\square_{e,n}) = \frac{n}{2} \sin(\alpha)$. Für umbeschriebene n -Ecke halbiert man jedes Dreieck und erhält so zwei rechtwinklige, kongruente Teildreiecke mit Winkel $\frac{\alpha}{2}$. Die Hypotenusen dieser Teildreiecke sind dann offenbar identisch und deren Länge gegeben durch $\cos(\frac{\alpha}{2})^{-1}$. Nach Bestimmung der Länge kann nun genauso verfahren werden wie im Fall der einbeschriebenen Dreiecke und man erhält mit Hilfe des Sinus den Flächeninhalt des Gesamtdreiecks als

$$I(\triangle_{u,n}) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-2} \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\sin(\alpha)}{(\cos(\alpha/2))^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1 + \cos(\alpha)} \right) \sin(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Wiederum ergibt sich der Flächeninhalt des umbeschriebenen n -Ecks als Summe der Flächeninhalte dieser n Dreiecke. Also erhält man

$$I(\square_{u,n}) = n \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (10)$$

Also erhält man insgesamt, dass

$$f_n = I(\square_{e,n}) = \frac{n}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$F_n = I(\square_{u,n}) = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

und

$$\begin{aligned} f_{2n} &= n \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = n \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}} = n \sqrt{\frac{1}{2} \sin(\alpha) \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}} \\ &= \sqrt{\frac{n^2}{2} \sin(\alpha) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \sqrt{f_n F_n} \\ &= G(f_n, F_n) \end{aligned}$$

Genauso erhält man die Gleichung für F_{2n} . Man sieht leicht ein, dass $F_n - f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist

$$a_{k+1} = f_{3 \cdot 2^{k+1}} = G(f_{3 \cdot 2^k}, F_{3 \cdot 2^k}) = \sqrt{f_{3 \cdot 2^k} F_{3 \cdot 2^k}} \geq f_{3 \cdot 2^k} \iff F_{3 \cdot 2^k} \geq f_{3 \cdot 2^k} \quad (11)$$

und

$$b_{k+1} = F_{3 \cdot 2^{k+1}} = H(f_{3 \cdot 2^{k+1}}, F_{3 \cdot 2^k}) \leq G(f_{3 \cdot 2^{k+1}}, F_{3 \cdot 2^k}) = \frac{f_{3 \cdot 2^{k+1}} + F_{3 \cdot 2^k}}{2} \leq \frac{2 \cdot F_{3 \cdot 2^k}}{2} = F_{3 \cdot 2^k} = b_k \quad (12)$$

Im Ergebnis gilt demnach $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k] = I_k$.

Weiterhin ist

$$b > a \implies \frac{b}{2} > \frac{a}{2} \implies G(a, b) \geq a \quad (13)$$

und

$$\frac{d}{da} H(a, b) = 2b \frac{1}{a+b} - 2ab \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{2b^2}{(a+b)^2} > 0 \quad (14)$$

Also gilt insbesondere

$$G(a, b) - H(G(a, b), b) \leq G(a, b) - H(a, b) \quad (15)$$

Daraus folgt nach kurzer Umformung

$$G(a, b) - H(a, b) \leq \frac{1}{2}(b - a) \quad (16)$$

Rekursiv kann man so schließen, dass

$$b_{k+1} - a_{k+1} \leq \frac{1}{2^k}(b - a) \quad (17)$$

und damit kann man wieder für jedes $\epsilon > 0$ ein k finden so, dass $I_k < \epsilon$. Das beweist schließlich, dass I_k eine Intervallschachtelung ist. ■

Aufgabe 8

Angenommen, $\sqrt[k]{n}$ ist keine natürliche Zahl sondern stattdessen rational mit $\sqrt[k]{n} = \frac{p}{q}$ und $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann folgt, dass auch p^k und q^k teilerfremd sind, da keine neuen Primfaktoren der beiden Zahlen p und q hinzugekommen sind. Andererseits ist $n = \frac{p^k}{q^k}$ eine natürliche Zahl nach Voraussetzung. Das ist dann nur möglich, wenn $q^k = 1 = q$ ist. Dann gilt aber $n = p^k$ und damit $\sqrt[k]{n} = p$, d.h. $\sqrt[k]{n}$ ist eine natürliche Zahl und damit Widerspruch zur Annahme, dass $\sqrt[k]{n}$ keine natürliche Zahl ist. ■

Aufgabe 9

Definiere die Folge $a_{n,m} = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{n}$. Dann gilt klarerweise

$$a_{n+1,m} < a_{n,m}$$

$$a_{n,m+1} < a_{n,m}$$

$$a_{n+1,m+1} < a_{n,m}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Somit muss gelten, dass $a_{1,1} = \frac{3}{2}$ das größte Element der Folge ist. Das ist aber äquivalent dazu, dass $\max M = \frac{3}{2}$, da $\frac{3}{2} \in M$. Aufgrund der Definition des Supremums ist dann aber klarerweise auch $\sup M = \max M = \frac{3}{2}$.

Wegen $\lim_{n,m \rightarrow \infty} a_{n,m} = 0$ ist M beschränkt und hat damit nach Satz 3 ein Infimum. Dieses Infimum ist gerade der Grenzwert, d.h. $\inf M = 0$. Wegen $0 \notin M$ existiert kein Minimum von M . ■

Aufgabe 10

(a). A ist gemäß Angabe nach oben beschränkt. Somit existiert nach der Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke $y = \sup A$. Für diese gilt einerseits $a \leq y \ \forall a \in A$ als auch $\nexists y' < y : a \leq y' < y \ \forall a \in A$. Gemäß den Anordnungsaxiomen von $\mathbb{R}$ gilt deshalb, dass $-a \geq$

$-y \forall a \in A$ und $\exists -y' > -y : -a \geq -y' > -y$. Das ist aber gleichbedeutend damit, dass $\inf(-A) = -y = -\sup A$. ■

(b). A ist gemäß Angabe nach unten beschränkt. Somit existiert eine größte untere Schranke $x = \inf A$. Für diese gilt dann einerseits $a \geq x \forall a \in A$ als andererseits auch $\exists x' > x : a \geq x' > x \forall a \in A$. Gemäß den Anordnungsaxiomen von $\mathbb{R}$ gilt deshalb, dass $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{x} \forall a \in A$ und $\exists x' \in \mathbb{R} : \frac{1}{x'} < \frac{1}{x} \wedge \frac{1}{a} \leq \frac{1}{x'} < \frac{1}{x}$. Dies ist aber wiederum gleichbedeutend damit, dass $\sup A^{-1} = \frac{1}{x} = (\inf A)^{-1}$. ■

Aufgabe 11

Betrachte $I_n := [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$. Wegen $x - \frac{1}{n} < x - \frac{1}{n+1} < x + \frac{1}{n+1} < x + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$I_{n+1} = \left[x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1} \right] \subset \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] = I_n \quad (18)$$

Für beliebiges $\epsilon > 0$ setze $n := \frac{2}{\epsilon} + 1$. Dann folgt

$$n > \frac{2}{\epsilon} \implies \frac{2}{n} < \epsilon \iff x + \frac{1}{n} - (x - \frac{1}{n}) = |I_n| < \epsilon \quad (19)$$

Also ist I_n eine Intervallschachtelung. Im Allgemeinen sind $x - \frac{1}{n}$ und $x + \frac{1}{n}$ jedoch nicht rational. Wähle also gemäß Satz 5 und Königsbergers Lösungshinweis rationale Zahlen q_n, r_n so, dass

$$x - \frac{1}{n} < q_n < x < r_n < x + \frac{1}{n} \quad (20)$$

und setze $\tilde{q}_n := \max\{q_1, \dots, q_n\}$ sowie $\tilde{r}_n := \min\{r_1, \dots, r_n\}$. Dann ist $\tilde{I}_n := [\tilde{q}_n, \tilde{r}_n]$ aufgrund der Intervallschachtelung der I_n und Beziehung (20) ebenfalls eine Intervallschachtelung und hat darüber hinaus für jedes $n \in \mathbb{N}$ rationale Randpunkte gemäß Konstruktion. ■

Aufgabe 12

Wir betrachten im Folgenden nur offene Intervalle. Für halboffene Intervalle folgt die Ausführung entsprechend randeinseitig.

Für abgeschlossene Intervalle ist die Behauptung trivial. Offene Intervalle unterteilen wir weiterhin in endliche, randeinseitig unbeschränkt und randbeidseitig unbeschränkte Intervalle. Für endliche Intervall (a, b) schreibt man

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{16n}, b - \frac{b-a}{16n} \right].$$

Für einseitig unbeschränkte Intervalle, z.B. (a, ∞) , demnach

$$(a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, a + n \right] \quad (21)$$

und für beidseitig unbeschränkte Intervalle schließlich

$$(-\infty, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] \quad (22)$$

■

Aufgabe 13

Die Lösung von Königsberger (p. 364) ist bereits ausführlich. Die Kernidee ist, die Annahme, dass es ein kleinstes Element der Menge aller Indizes $n \in \mathbb{N}$ für die $A(n)$ falsch ist, mit Hilfe der Aussagen (I) und (II) zum Widerspruch zu führen. Folglich muss diese Menge leer sein und damit alle $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ wahr. Der Beweis ist ähnlich zu dem von Satz 4 (p. 15). ■

Aufgabe 14

Es ist $\mathcal{E}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ mit $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$ und $\mathbb{N}_n$ wie in Kapitel 1, Aufgabe 9. Weiterhin ist

$$|\mathcal{P}_n| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n < \infty \quad (23)$$

Da $\mathbb{N}$ klarerweise abzählbar ist, ist die Vereinigung selbst abzählbar. Jede Menge $\mathcal{P}_n$ ist, wie oben gezeigt wurde, für alle $n \in \mathbb{N}$ endlich, also erst recht abzählbar. Die abzählbare Vereinigung endlicher Mengen ist aber abzählbar. Also ist $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ abzählbar. Alternativ kann man die Zuordnung

$f: \mathcal{E}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(e) = \sum_{k=1}^{|e|} 2^{e_k}$ betrachten. Hier ist $e = \{e_1, \dots, e_l\}$ für ein $l < \infty$. Dann ist diese Abbildung bijektiv.

Wäre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar, gäbe es eine Zuordnung jeder natürlichen Zahl zu einer Menge von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Sei diese Zuordnung f und die Menge A wie in der Angabe. Dann muss es ein $n \in \mathbb{N}$ geben so, dass $f(n) = A$. Dann ist entweder $n \in A \implies n \notin f(n) = A$ oder $n \notin A = f(n) \implies n \in A$. Anders ausgedrückt: Kein Element von A kann nach A abbilden, da es dann per Definition kein Element von A wäre. Ist es jedoch kein Element von A , dann liegt es nach Definition von A in A . Da es nur diese beiden Möglichkeiten der Zugehörigkeit von n gibt, kann ein n mit $f(n) = A$ nicht existieren. Folglich kann es keine Abbildung f geben, die alle Mengen $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ "trifft", d.h. surjektiv ist. Cantor hat bereits bewiesen, dass es für eine beliebige Menge A keine surjektive Abbildung $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ gibt. Sobald man $A = \mathbb{N}$ setzt, folgt das obige Resultat sofort. ■

Aufgabe 15

Betrachte die Abbildung $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$. Also hat f die Darstellung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & x > 0 \\ \frac{x}{1+x} & x < 0 \end{cases} \quad (24)$$

Sodann ist für beliebige $x, y \in (0, 1)$

$$f(x) = f(y) \iff \frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-y} \iff x - xy - y + yx = 0 \iff x = y \quad (25)$$

und genauso für $x, y \in (-1, 0)$. Das zeigt die Injektivität von f .

Für beliebiges $y \in (0, 1)$ definiere $a := \frac{y}{y+1}$. Dann ist $f(a) = y$. Genauso gilt für beliebiges $y' \in (-1, 0)$ und $a' := \frac{y'}{1-y'}$, dass $f(a') = y'$. Also ist f auch surjektiv und damit insgesamt bijektiv.

Als nächstes betrachte für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ die Abbildung $g: (a, b) \rightarrow (-1, 1)$,

$$g(x) := \frac{x - 1/2(b+a)}{1/2(b-a)} \quad (26)$$

Dann ist g bijektiv, denn mit $g(x) = g(y) \iff x = y$ ist g injektiv. Für beliebiges $y \in (-1, 1)$ definiere $x := \frac{1}{2}(b-a)y + \frac{1}{2}(b+a)$. Dann ist $g(x) = y$. Somit wird durch die Komposition $f \circ g: (a, b) \rightarrow (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bijektion zwischen beliebigen offenen Intervallen und $\mathbb{R}$ hergestellt.

Schlussendlich betrachte die Abbildung $h: [-1, 1] \rightarrow (-1, 1)$,

$$h(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x & |x| = 2^k \ k \in \mathbb{N}_0 \\ x & \text{sonst} \end{cases} \quad (27)$$

Beide Teile von h sind offensichtlich bijektiv, also ist h bijektiv. Also stellt die Komposition

$$f \circ h \circ g: [a, b] \rightarrow [-1, 1] \rightarrow (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad (28)$$

eine Bijektion von beliebigen abgeschlossenen Intervallen auf $\mathbb{R}$ da. Damit sind alle reellen Intervalle gleich mächtig wie $\mathbb{R}$. ■